# CHAPITRE 1 : NOTION DE MOMENTS

Pour décrire un mouvement de précession, comme celui d'une toupie, plusieurs types de moments doivent être distingués, notamment le moment d'une force, le moment d'inertie et le moment angulaire.

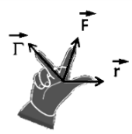
## MOMENT D'UNE FORCE : $\vec{\Gamma}$

Le moment $\vec{\Gamma}$ d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point $P$ d'un objet susceptible de tourner autour d'un point $O$, s'exprime par :


$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{r} \wedge \vec{F}} \qquad (\text{unité SI : } N \cdot m) \qquad \text{avec} \quad \vec{r} = \overrightarrow{OP}$$

L'opérateur $\wedge$ est nommé « produit vectoriel ». Celui-ci donne au vecteur $\vec{\Gamma}$ les propriétés suivantes :

- $\vec{\Gamma}$ est perpendiculaire au plan contenant les 2 vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{F}$ ;
- $\vec{\Gamma}$ a pour sens celui indiqué par la règle des « 3 doigts de la main droite » ($\vec{r}$ : pouce, $\vec{F}$ index, $\vec{\Gamma}$ : majeur) ;
- $\vec{\Gamma}$ a pour norme : $\Gamma = r\, F\, \left|sin\left(\widehat{\vec{r},\vec{F}}\right)\right|$, avec $r$ et $F$ les normes respectives des vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{F}$.




> La norme du moment de force est proportionnelle à l'intensité de la force et à la distance de son point d'application par rapport au pivot de rotation. Elle est maximale si $\vec{F}$ est perpendiculaire à $\vec{r}$ , et nulle si $\vec{r}$ et $\vec{F}$ sont alignés.

*Remarque* : Le produit vectoriel n'est pas commutatif, mais antisymétrique : $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$ , quels que soient les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

## MOMENT D'INERTIE : $\mathcal{M}$

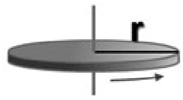
Le moment d'inertie $\mathcal{M}$ d'un objet est un scalaire dont la valeur représente la résistance au changement de vitesse de rotation.

Pour un objet quasi-ponctuel :


$$\mathcal{M}_{point} = m_{point}\, r^2 \qquad (\text{unité SI : } kg.m^2)$$

Avec $m$ : masse de l'objet, et $r$ le rayon de giration.

Pour un disque : $\mathcal{M}_{disque} = \frac{m_{disque}\, r_{disque}^2}{2}$




## MOMENT ANGULAIRE : $\vec{L}$

Le moment angulaire $\vec{L}$, appelé également moment cinétique, correspond au « moment de la quantité de mouvement » ou à « l'élan de rotation » d'un objet.

*Pour un objet quasi-ponctuel* animé d'un mouvement circulaire de rayon $\vec{r}$, le moment angulaire est donné par :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \qquad (\text{unité SI : } kg \cdot m^2 \cdot s^{-1})$$

avec $\vec{p}$ quantité de mouvement ($\vec{p} = m\vec{v}$) et $\vec{v}$ vitesse linéaire tangentielle de rotation (unité SI : $m \cdot s^{-1}$) de l'objet. D'où :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}$$

Le moment angulaire est dirigé selon la direction de l'axe de rotation (à la fois perpendiculaire à $\vec{r}$ et à $\vec{v}$).

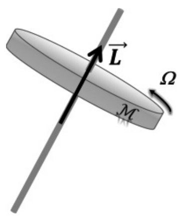
Pour une trajectoire circulaire, $\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{r}$, d'où $\left|sin\left(\widehat{\vec{r},\vec{v}}\right)\right| = 1$, et donc :

$$L = m\,r\,v$$

Avec $\Omega$ vitesse angulaire ($\Omega = \frac{v}{r}$ , unité SI : $\mathrm{rd} \cdot \mathrm{s}^{-1}$) la norme du moment angulaire devient :

$$L = mr^2\Omega = \mathcal{M}\Omega$$

Cette relation peut être généralisée à un *objet quelconque* en rotation. Avec $\vec{\Omega}$ : vecteur vitesse angulaire, de norme $\Omega$ et de direction celle de l'axe de rotation, et $\mathcal{M}$ le moment d'inertie de cet objet, on a :




$$\boxed{\vec{L} = \mathcal{M}\vec{\Omega}}$$

> *Remarque* : L'analogie avec l'expression de la quantité de mouvement pour le mouvement rectiligne ($\vec{p} = m\vec{v}$) est évidente.

### *Variation de moment angulaire*

D'après le principe fondamental de la dynamique (Newton 1643-1727) appliqué au mouvement de rotation, la dérivée par rapport au temps du moment angulaire est égale à la somme des moments des forces :

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \frac{\overrightarrow{dL}}{dt}}$$

*Remarque 1* : L'analogie avec le mouvement rectiligne est là aussi évidente : $\vec{F} = \frac{\overrightarrow{dp}}{dt}$ (ce qui conduit à $\vec{F} = m\frac{\overrightarrow{dv}}{dt} = m\vec{a}$, avec $\vec{a}$ : accélération linéaire).

*Remarque 2* : En absence de force extérieure, le moment angulaire (élan de rotation) se conserve ($\frac{dL}{dt} = 0$).

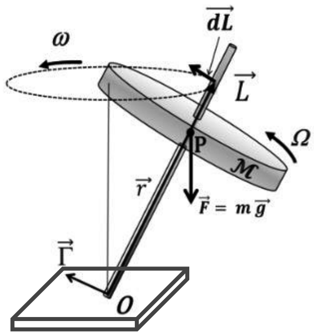
### APPLICATION AU MOUVEMENT DE PRECESSION D'UNE TOUPIE

Considérons une toupie constituée d'un disque et d'une tige centrale dont l'extrémité sert de pivot.

Deux situations distinctes se présentent :

- *En l'absence de rotation du disque* (i.e. lorsque le moment angulaire est nul) la force de pesanteur fait tomber la toupie.
- Par contre, *si le disque tourne sur lui-même en rotation rapide* (vitesse de rotation $\vec{\Omega}$) la toupie décrit un **mouvement dit « de précession » :** l'axe de la toupie décrit lentement l'enveloppe d'un cône.

Dans ce deuxième cas, le disque possède un moment angulaire non nul ($\vec{L} = \mathcal{M}\vec{\Omega}$) dirigée selon l'axe de rotation de la toupie, dont la variation au cours du temps est égale au moment de la force de gravité :




$$\frac{\overrightarrow{dL}}{dt} = \vec{\Gamma} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

avec : $\vec{F} = m\vec{g}$ [1]

[1] Rappel : $\vec{g}$ est le vecteur accélération gravitationnelle. Sur terre, $g \approx 9{,}81$ m.s$^{-2}$.

$\frac{\overrightarrow{dL}}{dt}$ est donc constamment perpendiculaire à l'axe $\vec{r}$ (donc à $\vec{L}$) et perpendiculaire à la force s'exerçant sur le système (force de pesanteur verticale).

L'extrémité du vecteur $\vec{L}$ décrit donc un mouvement de rotation horizontal.

*Remarque :*

Soit $\vec{x}$ le vecteur unitaire (i.e. de norme égale à 1) dirigé selon l'axe de la toupie. Puisque $\vec{L}$ et $\vec{r}$ sont dirigés selon cet axe, on a :

$$\vec{L} = L\,\vec{x} \quad et \quad \vec{r} = r\,\vec{x}$$

L'équation : $\frac{\overrightarrow{dL}}{dt} = \vec{r} \wedge m\vec{g}$ peut être mise sous la forme :

$$\frac{\overrightarrow{dx}}{dt} = k\,\vec{x} \wedge \vec{g}$$

avec : $k = \frac{mr}{L} = \frac{mr}{\mathcal{M}\Omega}$

Nous verrons ultérieurement que la variation des moments magnétiques des noyaux s'exprime de manière similaire.

On montrerait facilement (cf. Annexe 1) qu'en l'absence de force de frottement, la **vitesse angulaire de précession ω** est constante, et est proportionnelle à la valeur du champ de force appliqué (ici le champ de force gravitationnelle).

$$\boldsymbol{\omega = k\,g} \qquad (unit\acute{e}\ \mathrm{SI} : \ rd \cdot s^{-1})$$

## POINTS ESSENTIELS DU CHAPITRE 1

- Le moment d'une force s'écrit : $\vec{\Gamma} = \vec{r} \wedge \vec{F}$
    - $\vec{\Gamma}$ est donc perpendiculaire à la direction de la force.

- Le moment angulaire, ou moment cinétique, $\vec{L}$, d'un objet en rotation a pour expression : $\vec{L} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}$
    - $\vec{L}$ est dirigé selon la direction de l'axe de rotation.

- D'après le principe fondamental de la dynamique : $\vec{\Gamma} = \frac{\overrightarrow{dL}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}$
    - Pour un objet présentant un moment angulaire non négligeable, l'action d'un moment de force se traduit par une variation du moment angulaire perpendiculaire à la direction de la force.
    - Sous l'action d'un moment de force, le moment angulaire tourne selon un mouvement de précession, autour d'un axe principal dirigé dans la direction de la force.
    - La vitesse angulaire de précession $\omega$ est proportionnelle à la valeur du champ de force appliqué.

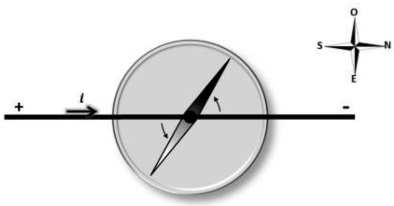
# CHAPITRE 2 : CHAMPS MAGNETIQUES STATIQUES ET INTERACTIONS

Dans ce chapitre, sont présentées différentes sources de champs magnétiques statiques, puis l'interaction des champs magnétiques statiques avec différents éléments.

## SOURCES DE CHAMP MAGNETIQUE STATIQUE

### EXPERIENCE D'OERSTED

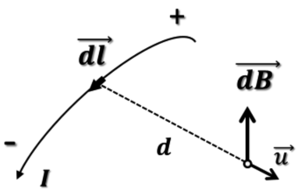
En 1819 le danois Hans Christian **Oersted,** pharmacien et médecin puis physicien, découvrit qu'un fil conducteur parcouru par un courant électrique continu agit sur l'aiguille aimantée d'une boussole placée à proximité, en l'orientant perpendiculairement à la direction du courant.




Cette expérience montra que le déplacement de charges électriques produit, à proximité, un champ magnétique statique. Elle marqua le début des travaux sur l'électromagnétisme.

### LOI DE BIOT ET SAVART

L'année suivante, en 1820, deux physiciens français Jean-Baptiste **Biot et** Félix **Savart,** ont établi l'expression du champ magnétique élémentaire $\overrightarrow{dB}$ produit par un petit élément de fil conducteur $\overrightarrow{dl}$ parcouru par un courant $I$ à une distance $d$ dans le vide.




Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire dont la direction est celle reliant l'élément de courant au point considéré, alors :

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\overrightarrow{dl} \wedge \vec{u}}{d^2}$$

Dans le système international d'unité (SI), le champ magnétique s'exprime en tesla (symbole : T), en l'honneur de Nikola **Tesla** (1856-1943), inventeur hors-pair de nombreuses applications de l'électromagnétisme.

$\mu_0$ est appelée **« constante magnétique du vide »** ou constante de perméabilité magnétique du vide ($\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ T \cdot m \cdot A^{-1}$).

Le champ magnétique total créé par un circuit électrique de forme quelconque parcouru par un courant continu, s'obtient par intégration le long du circuit :

$$\vec{B} = \int_{circuit} \overrightarrow{dB}$$

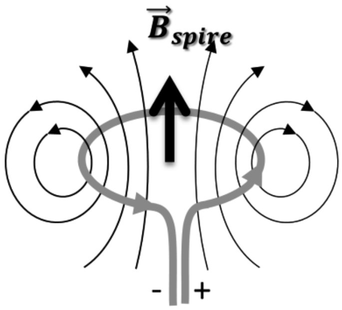
## CHAMP MAGNETIQUE CREE PAR UNE SPIRE DE COURANT

Soit une boucle de courant (spire) circulaire de rayon $r$ parcourue par un courant $I$ continu.

La norme du champ magnétique créé au centre de la spire est donnée par (cf. Annexe 2):

$$B_{Spire} = \frac{\mu_0}{2r} I$$

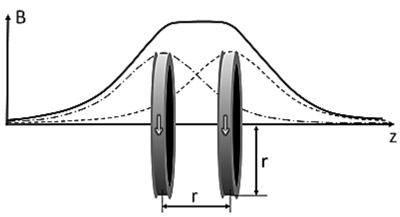
La direction du champ magnétique est perpendiculaire au plan de la spire.




Le champ magnétique produit au centre d'une bobine plate constituée d'un enroulement de fil conducteur de $N$ tours, devient : $B_{bobine} = \frac{\mu_0\, N}{2r} I$

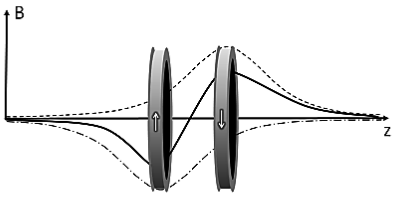
## CHAMP UNIFORME ET GRADIENT DE CHAMP

Hermann Ludwig von **Helmholtz** (1821-1894), médecin et physicien allemand, a montré que lorsque 2 bobines plates circulaires identiques sont disposées face à face à une distance égale à leur rayon, on obtient un *champ uniforme* entre les 2 bobines.




Un *champ uniforme* est également obtenu à l'intérieur d'un **solénoïde**, constitué d'un enroulement en hélice d'un fil conducteur.

Si, dans un montage de type « Helmholtz », on inverse le courant d'une bobine par rapport à l'autre, on crée au contraire un « *gradient de champ magnétique* », c'est-à-dire un champ variable de manière quasi-linéaire dans l'espace.




Ces configurations sont utilisées dans les appareils d'imagerie par résonance magnétique (IRM) qui nécessitent à la fois des bobines génératrices de champ uniforme et des bobines de gradients.

## LE PROBLEME DES BOBINES RESISTIVES : L'EFFET JOULE

Pour réaliser des images IRM, le patient doit être placé dans un champ magnétique statique suffisamment important. Les appareils d'IRM nécessitent des bobines de grand diamètre à l'intérieur desquelles est positionné le sujet.

Deux types de bobines sont utilisées : résistives ou supraconductrices.

Du fait que les **bobines résistives** sont de grand diamètre et que le champ magnétique généré doit être élevé, la puissance calorifique dégagée par **effet Joule** et la masse de ces bobines résistives sont nécessairement très importantes (cf. Annexe 4), ce qui limite leur possibilité d'utilisation.

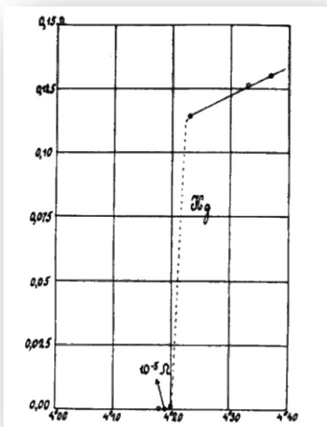
> En pratique, les IRM fonctionnant avec des bobines résistives ne permettent pas de disposer de champs intenses, c'est-à-dire supérieurs à 0,5 T.

## BOBINES A SUPRACONDUCTEURS

Heike Kamerlingh **Onnes** (Nobel 1913), physicien néerlandais, premier à produire la liquéfaction de l'hélium en 1908 à une température proche de 4K (-269°C), découvrit en **1911** qu'à très basse température certains conducteurs perdaient brutalement leur résistivité (cf. figure ci-contre).

Ce phénomène est désigné sous le nom de supraconductivité.

La plupart des appareils modernes d'IRM utilisent des **bobines à supraconducteur** refroidies avec de l'hélium liquide maintenu en ébullition à 4K.



Relevé effectué en 1911 par H. K. Onnes de la résistivité du mercure en fonction de la température, au laboratoire de Leyde (Pays Bas).